



TITLE:

# Genus2のHeegaard分解をもつ Homology 3-Sphers (3次元4次元に おける幾何学的トポロジーの研究)

AUTHOR(S):

落合, 豊行

---

CITATION:

落合, 豊行. Genus2のHeegaard分解をもつHomology 3-Sphers (3次元4次元における幾何学的トポロジーの研究). 数理解析研究所講究録 1976, 268: 52-68

ISSUE DATE:

1976-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105886>

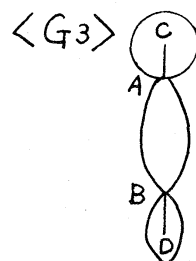
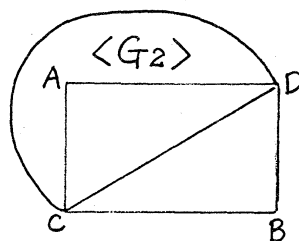
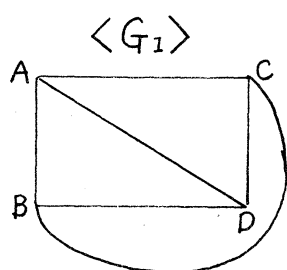
RIGHT:

# genus 2 の Heegaard 分解をもつ homology 3-sphere

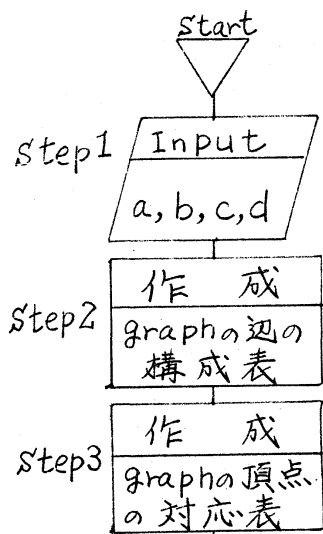
東工大 情報科学科 落合豊行

Tatsuo Homma [1]により、genus 2 の Heegaard 分解を持つ 3次元多様体の構造と平面 graph との間に密接な関係があることが示された。この基本的考えにもとずいて、下記に述べる 3つの平面 graph から全ての genus 2 homology 3-sphere が理論的に computer で実現できることが示される。さらに homotopy 3-sphere と homology 3-sphere との間の相違点を computer で作った homology 3-sphere のモデルから見つけだすことを目的として、実際に program を実行し、解析を行ってみることにする。

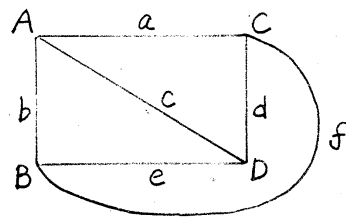
定義) 平面 graph  $G_1, G_2, G_3$  とは次の 3つの graph のことである。



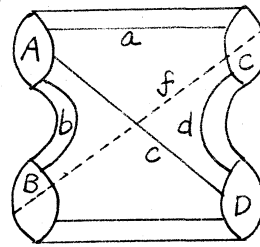
以下で program の説明を行ってみることにする。



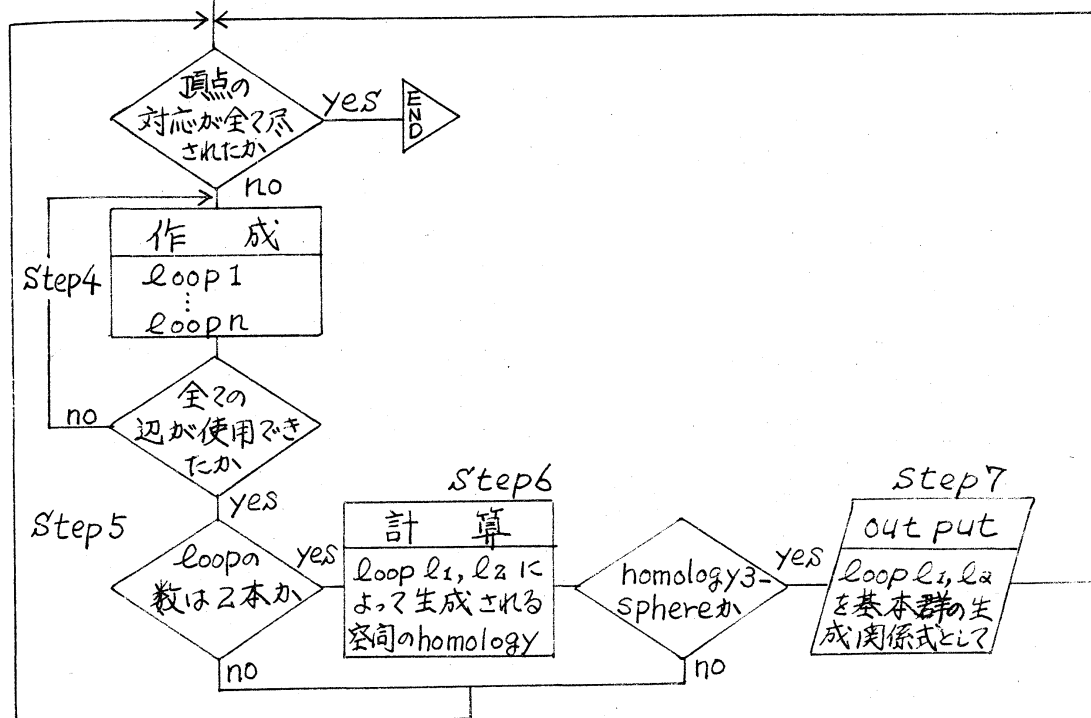
Step1: graph  $G$  は input として、次の  
様に辺の重複度に基づく parameter  $a, b$   
 $c, d, e, f$  で与えられる。



<G1>



<Fig1>



ところが、graph  $G_1$  から Fig-1 をもとにして genus 2 の  
solid torus を作るには A と B, C と D を張り合わせて作る  
ので、実際には  $a = e$ ,  $c = f$  であるので、input すべき



表で、trefoil knot から Dehn construction によって作られる homology 3-sphere の genus 2 Heegaard 分解ができる。

Step 4: Heegaard 分解を与える (2つの) loop  $l_1, l_2$  を作る。Fig-3 の例で loop  $l_1, l_2$  を表示して見ると、

$$l_1; (A_1 C_1)(D_3 B_3)(A_5 D_5)(C_3 A_3)(B_1 D_1)(C_6 B_5)$$

$$l_2; (A_2 C_2)(D_4 A_6)(B_4 C_7)(D_2 B_2)(A_4 D_6)(C_4 D_7)(C_5 B_6)$$

Step 5: computer は 2本以上の loop を持つ空間を作るが、genus 2 の Heegaard 分解には 2つの meridian の張り合わせの為に丁度 2本の loop のみを必要とする。

Step 6: 2本の loop  $l_1, l_2$  は作られる Heegaard 分解の homology と homotopy 群を決定する、すなわち基本群の生成関係式を与える。これを使って homology 群が trivial かどうかを決める。すなわち、loop  $l_1, l_2$  の辺の結びつぎの中で  $\overrightarrow{BA}$  を +1,  $\overrightarrow{AB}$  を -1,  $\overrightarrow{CD}$  を +1,  $\overrightarrow{DC}$  を -1 と決め、次の 2次の行列式が  $\pm 1$  になるかどうかで homology 3-sphere かどうかを決定できる。

$$\begin{pmatrix} \sum_{l_1} \overleftrightarrow{BA} & \sum_{l_1} \overleftrightarrow{CD} \\ \sum_{l_2} \overleftrightarrow{BA} & \sum_{l_2} \overleftrightarrow{CD} \end{pmatrix}$$

Step 7: (1) Step 4 で書いた loop  $l_1, l_2$  の結合表。

(2)  $\overrightarrow{BA}$  を  $s$ ,  $\overrightarrow{CD}$  を  $t$  とし、 $s, t$  を基本群の

2つの生成元として  $l_1, l_2$  を生成関係式として表現する。

例えば、Step 4 の例を関係式で書いて見ると、

$$l_1; t_1 t_2^{-1} t_1^{-1} = 1$$

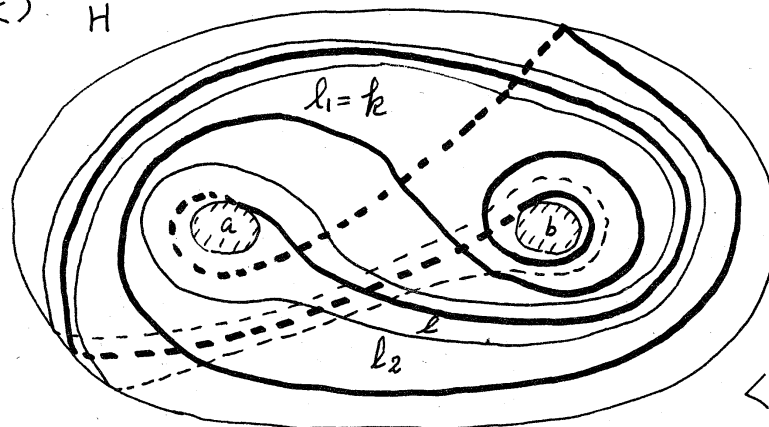
$$l_2; t_1^{-1} t_2 t_1^{-2} = 1 \text{ となる。}$$

(1), (2) を output として list out する。

次に computer で作った example の解析を始める前に、以下のことを述べておく。2-bridge knot から Dehn construction で作られる homology 3-sphere の Heegaard 分解は次の proposition で述べる如く簡単に作れる。

prop ; 2-bridge knot から自然な方法で genus 2 の Heegaard 分解をもつ homology 3-sphere が作れる。

(証) H



<Fig-4>

$S^3$  に standard に embed された genus 2 の Solid torus を H とする。a, b を H の外側に張った proper な 2 つの disk とする。このとき 2-bridge knot  $k$  は  $\partial H$  の上で a, b とそれぞれ一点ずつで交わるようにできる。従って、disk

$a$  と  $b$  を結ぶ  $K$  上の 2 つの arc が存在する。この arc のうちの 1 つを  $l$  とする。そのとき  $aubul$  と平行な  $H$  上の simple closed curve で  $K$  と交わらないものが常に存在する。これを  $l_2$  とする。 $l_2$  には  $H$  の外側を  $S^3$  における disk がはれる。今 solid torus  $H$  の 2 つの生成元を  $S$ ,  $u$  とすると  $l_2$  に張った disk は  $St \sim 0$  なる関係を与える。一方、 $K = l_1$  は  $a$ ,  $b$  とそれぞれ一点ずつで交わるので  $S$ ,  $u$  の間のどんな関係式をも作れるように  $H$  上に embed されたままを変えられる。よって  $l_1, l_2$  を Heegaard 分解の 2 つの meridian disk の張り合わせとする homology 3-sphere が作れる。又、disk  $a, (b)$  と  $l_2$  に張った disk で作られる Heegaard 分解は  $S^3$  の Heegaard 分解を与えるので、 $l_1, l_2$  は knot  $K$  から Dehn construction で作られる homology 3-sphere の Heegaard 分解を与える。実際 Fig-4 は Step 3 で述べている trefoil knot から Dehn construction で作られる homology 3-sphere の Heegaard 分解を与えている。

さて、Facom 230-45S で作、たいくつかの homology 3-sphere の解析を始める。Example の範囲は  $N \leq 15$ ,  $M \leq 15$  で作、てみた。使用言語は assembler を使った。

(I)  $\pi_1(M) \neq 0$  が示せる例

$$(I_1) \begin{cases} b^2 a^3 b^2 a^2 b^2 a^3 b^2 a^{-1} = 1 & \text{--- (1)} \\ b^5 a^3 b^2 a^3 = 1 & \text{--- (2)} \end{cases}$$

(2)より  $a^3 b^2 = b^{-5} a^{-3}$  これを(1)に代入して

$$b^2 (b^{-5} a^{-3}) a^2 b^2 (b^{-5} a^{-3}) a^{-1} = 1$$

$$b^{-3} a^{-1} b^{-3} a^{-4} = 1 \quad a^4 b^3 a b^3 = 1 \text{ --- (3)}$$

ここで  $b^3 = 1$  とおくと (3)より  $a^5 = 1$

$$(2)より \quad b^2 a^3 b^2 a^3 = 1 \quad b^{-1} a^{-2} b^{-1} a^{-2} = 1 \rightarrow (b a^2)^2 = 1$$

$$y = ba \text{ とおくと } b = y a^{-1}$$

$$a^5 = (y a^{-1})^3 = (y a)^2 = 1 \text{ --- (4)}$$

従って  $(I_1)$  は(4)で表現される群が non-trivial なら

$$\pi_1(M) \neq 0 \quad \text{ところが } a^5 = y^5 = (y a)^2 = (y a^{-1})^3 = 1$$

で表現される群は  $[Z]$  によって non-trivial である。

$$(II_2) \begin{cases} b a b a^{-3} b a b a^{-3} b a b a^{-2} = 1 & \text{--- (1)} \\ b^4 a^{-1} b^{-1} a^{-1} b^3 a^{-1} b^{-1} a^{-1} = 1 & \text{--- (2)} \end{cases}$$

Heegaard 分解の2つの meridian disk を(1), (2)で張

り合わせる attach map を  $f$  とする。このとき  $f^{-1}$  を

表現する関係式は図を書いてみると、(  $f$  で書いた関

係式を  $f^{-1}$  で書いたものを conjugate presentation

$$\text{とする。)} \quad a^3 = b^2 a^8 b^2 \text{ --- (3)}$$

$$b^2 = a^3 b^7 a^3 \text{ --- (4) となる。}$$



今、 $a'' = b^9 = 1$  とおくと (3), (4) 共に  $(a^3 b^{-2})^2 = 1$

さらに  $A = a^3$ ,  $B = b^2$  とおくと、 $a = A^4$ ,  $b = B^5$

従って  $A'' = B^9 = (AB^{-1})^2 = 1$  となる non-trivial [2].

$$(II_3) \begin{cases} a^2 = b^{-1} a b^{-1} a b a^{-1} b a^{-1} b a b^{-1} a b^{-1} & (1) \\ b^2 = a^{-1} b a^{-1} b a b^{-1} a b^{-1} a b a^{-1} b a^{-1} & (2) \end{cases}$$

$x = a^{-1} b$  とおくと、(2) により  $b^3 = (a^{-1} b)^2 a (b^{-1} a)^2 b (a^{-1} b)^2$

$a = b x^{-1}$  であるから  $b^3 = x^2 b x^{-1} x^2 b x^2$

$$b^3 = x^2 b x^{-3} b x^2 \quad (3)$$

又 (1) より  $a^3 = (b^{-1} a)^2 b (a^{-1} b)^2 a (b^{-1} a)^2$

$$(b x^{-1})^3 = x^{-2} b x^2 b x^{-1} x^{-2}$$

$$(b x^{-1})^3 = x^{-2} b x^2 b x^{-3} \quad (4)$$

(3) と (4) において  $x \rightarrow -x$

$$x^2 b^3 x^2 = b x^3 b \quad (5)$$

$$(b x)^3 = x^2 b x^{-2} b x^3 \quad (6)$$

(5) より  $x^{-2} b x^3 = b^3 x^2 b^{-1}$  これを (6) に代入して

$$(b x)^3 = x^2 b (b^3 x^2 b^{-1}) \quad (b x)^3 = x^2 b^4 x^2 b^{-1}$$

$$x^3 = b^5 = 1 \text{ とおくと } (b x)^3 = x^{-1} b^{-1} x^{-1} b^{-1}$$

故、 $(b x)^5 = 1$

$$(5) \text{ より } x^{-1} b^{-2} x^{-1} = b^2 \quad (x b^2)^2 = 1$$

そこで  $x b = y$  とおくと  $x = y b^{-1}$

$$b^5 = y^5 = (y b)^2 = (y b^{-1})^3 = 1 \text{ となる。}$$

ところがこれは、[2]により non-trivial。

$$(I_4) \begin{cases} a = b^2 a^2 b^{-2} a^{-2} b^{-2} a^2 b^2 & \text{--- (1)} \\ b = a^2 b^2 a^{-2} b^{-2} a^{-2} b^2 a^2 & \text{--- (2)} \end{cases}$$

$$(1) \text{より } b^2 a^2 b^{-2} a^{-2} = a b^{-2} a^{-2} b^2$$

$$(2) \text{より } b^2 a^2 b^{-2} a^{-2} = a^{-2} b^2 a^2 b^{-1}$$

$$a b^{-2} a^{-2} b^2 = a^{-2} b^2 a^2 b^{-1}$$

$$a^3 b^{-2} a^{-2} b^3 = b^2 a^2 \text{ --- (3)}$$

ここで  $a^5 = 1$ ,  $b^5 = 1$  とおくと

$$a^3 b^3 a^3 b^3 a^3 b^3 = 1 \rightarrow (a^3 b^3)^3 = 1 \text{ --- (4)}$$

$$(4) \text{より } b^2 a^{-2} b^{-2} = b^3 a^3 b^3 = a^{-3} b^{-3} a^{-3}$$

$$\begin{aligned} \text{故、} \quad a &= b^2 a^2 (b^{-2} a^{-2} b^{-2}) a^2 b^2 \\ &= b^2 a^2 a^{-3} b^{-3} a^{-3} a^2 b^2 \end{aligned}$$

$$\text{従、} \quad a = b^2 a^{-1} b^{-3} a^{-1} b^2 \rightarrow (a^{-1} b^2)^3 = 1 \text{ --- (5)}$$

$A = a^3$ ,  $B = b^3$  とおくと  $a = A^2$ ,  $b = B^2$  となり、

$$A^5 = B^5 = (AB)^3 = (A^2 B)^3 = 1$$

$$C = AB \text{ とおくと } A^5 = C^3 = (A^{-1} C)^5 = (AC)^3 = 1$$

$$D = AC \text{ とおくと } C^3 = D^3 = (DC^{-1})^5 = (CD^{-1}C)^5 = 1$$

$$C^3 = D^3 = (DC^{-1})^5 = (DC)^5 = 1$$

(6)式は[2]により non-trivial である。

← (6)

$$(I_5) \begin{cases} a^2 = bab^{-1}aba^{-1}b^{-1}a^{-1}bab^{-1}ab \\ b^2 = aba^{-1}bab^{-1}a^{-1}b^{-1}aba^{-1}ba \end{cases}$$

この式は (II<sub>2</sub>) で述べた conjugate presentation で書いて見ると (II<sub>4</sub>) 式になるので、やはり non-trivial である。

$$(II_6) \begin{cases} ba^{-1}ba^2b^{-1}a^{-2}b^{-1}a^2ba^{-1} = 1 \\ ba^2b^8a^2ba^{-3} = 1 \end{cases}$$

$$(II'_6) \begin{cases} ba^{-1}ba^2b^{-1}a^{-2}b^{-1}a^2ba^{-1} = 1 \\ ba^2b^na^2ba^{-3} = 1 \end{cases}$$

(II'<sub>6</sub>) を conjugate presentation で書くと

$$\begin{cases} a^2 = b^{-1}aba^{-1}bab^{-1}aba^{-1}bab^{-1} & \text{--- (1)} \\ b^na^{-1}ba^3ba^{-1} = 1 & \text{--- (2)} \end{cases}$$

$$a^4 = 1 \text{ とおくと (2) より } b^na^{-1}ba^{-1}ba^{-1} = 1$$

$$b^{n-1} = (ab^{-1})^3 \text{ --- (3)}$$

$$\text{さらに } b^{n-1} = 1 \text{ とおくと } ab^{-1}ab^{-1} = ba^{-1} \text{ なる}$$

$$(1) \text{ より } (ba^{-1})b(ba^{-1})b(ba^{-1})b(ba^{-1})b(ba^{-1})b = 1$$

$$\text{故に } (ba^{-1}b)^5 = 1$$

$$\text{ここで } x = ab^{-1} \text{ とすると } a = xb$$

$$x^3 = b^{n-1} = (xb)^4 = (x^{-1}b)^5 = 1 \text{ --- (4)}$$

[2] によって  $n-1 = 3m$  ( $m=0, \pm 1, \dots$ ) のとき、non-trivial。

注) (II'<sub>6</sub>) は (II<sub>6</sub>) が Heegaard 分解を与えることから、それ自身 Heegaard 分解を与える。

$$(II_7) \begin{cases} babab^{-4}ababa^{-3}=1 \\ babab^{-3}ababa^{-4}=1 \end{cases}$$

conjugate presentation で表わすと

$$(II'_7) \begin{cases} abababab^{-1}a^{-2}b^{-2}a^{-2}b^{-1}=1 \text{ --- (1)} \\ babababa^{-1}b^{-2}a^{-2}b^{-2}a^{-1}=1 \text{ --- (2)} \end{cases}$$

$$x=ab \text{ とおくと } a=xb^{-1}, a^{-1}=bx^{-1}$$

$$(1) \text{ より } x^4b^{-2}bx^{-1}bx^{-1}b^2bx^{-1}bx^{-1}b^{-1}=1$$

$$x^4b^{-1}x^{-1}bx^{-1}b^{-1}x^{-1}bx^{-1}b^{-1}=1 \text{ --- (3)}$$

$$(2) \text{ より } bx^3bx^{-1}b^{-2}bx^{-1}bx^{-1}b^2bx^{-1}=1$$

$$bx^3bx^{-1}b^{-1}x^{-1}bx^{-1}b^{-1}x^{-1}=1 \text{ --- (4)}$$

$$(3)+(4) \text{ より } bx^3(xbx^{-4})x^{-1}=1 \quad bx^4b=x^5 \text{ --- (5)}$$

$$\text{ここから } y=bx^4 \text{ とおくと } b=yx^{-4}, b^{-1}=x^4y^{-1}$$

$$\text{さらに } x^9=1 \text{ とおくと (5) より } y^2=1$$

$$(4) \text{ より } (xy)^5=1$$

$$x^9=y^2=(xy)^5=1 \quad (\text{unknown})$$

$$(II_8) \begin{cases} a^2=bab^{-1}a^{-1}b^{-1}abab^{-1}a^{-1}b^{-1}ab \\ b^2=aba^{-1}b^{-1}a^{-1}baba^{-1}b^{-1}a^{-1}ba \end{cases}$$

conjugate presentation によつて (II<sub>3</sub>) と同型。

$$(II_8) \text{ は } \begin{cases} a^2=bab^{-1}a^{-1}b^{-1}abab^{-1}a^{-1}b^{-1}ab \\ b^m=aba^{-1}b^{-1}a^{-1}baba^{-1}b^{-1}a^{-1}ba \end{cases}$$

でも、成立。

$$(II_9) \begin{cases} ba^2ba^{-1}b^{-3}a^{-1} = 1 & \text{--- (1)} \\ ba^3ba^{-1}b^{-2}a^{-1}ba^3ba^{-1}b^{-2}a^{-1}b^{-2}a^{-1} = 1 & \text{--- (2)} \end{cases}$$

$$a^3 = 1 \text{ とおくと (1) より } ba^{-1}ba^{-1}b^{-3}a^{-1} = 1$$

$$b^4 = (a^{-1}b)^3 \text{ --- (3)}$$

$$b^4 = 1 \text{ とおくと (2) より } (b^2a^{-1})^5 = 1 \text{ --- (4)}$$

$$y = ba^{-1} \text{ とおくと } b = ya \text{ ぞ (3) より } y^3 = 1$$

$$(4) \text{ より } (yaya^{-1})^5 = (yay)^5 = 1$$

$$(y^2a)^5 = 1 \rightarrow (y^{-1}a)^5 = 1$$

$$\text{従って } a^3 = y^3 = (ya)^4 = (y^{-1}a)^5 = 1$$

[2] により non-trivial.

$$(II_{10}) \begin{cases} ba^{-1}b^2a^{-1}ba^{-1}b^{-1}ababab^{-1}a^{-1} = 1 & \text{--- (1)} \\ ba^{-1}b^2a^{-1}ba^4ba^{-1}b^2a^{-1} = 1 & \text{--- (2)} \end{cases}$$

$$(2) \text{ より } b^3 = 1 \text{ とおくと } ba^{-1}ba^{-1}ba^4ba^{-1}ba^{-1} = 1$$

$$a^5 = (ab^{-1})^5$$

$$a^5 = 1 \text{ とおくと (1) より } (ba^{-1})^3b^{-1}ababab^{-1}a^{-1} = 1$$

$$(ba)^4 = 1$$

$$\text{従って } a^5 = b^3 = (ab)^4 = (ab^{-1})^3 = 1 \text{ (unknown)}$$

$$(II_{11}) \begin{cases} baba^{-1}b^{-1}a^{-3}b^{-1}a^{-1}b^4a^{-1}b^{-1}a^{-3}b^{-1}a^{-1} = 1 & \text{--- (1)} \\ b^3a^{-1}b^{-1}a^{-2}b^{-1}a^{-1} = 1 & \text{--- (2)} \end{cases}$$

$$(2) \text{ より } a^2 = b^{-1}a^{-1}b^3a^{-1}b^{-1} \text{ --- (3)}$$

$$(1) + (3) \text{ より } b^2 = ab^{-1}b^{-1}a^{-1}baba^{-1}b^{-1}a^{-1}ba \text{ --- (4)}$$

$$(4) + (2) \text{ より } b(aba^{-1}b^{-1}a^{-1}baba^{-1}b^{-1}a^{-1}ba)a^{-1}b^{-1}a^{-2}b^{-1}a^{-1} \\ a^{-3} = bab^{-1}a^{-1}b^{-1}abab^{-1}a^{-1}b^{-1}ab = 1 \quad (5)$$

(II<sub>1</sub>)  $\cong (4) + (5)$  で (4) + (5) において  $a^5 = 1$  において上式は non-trivial であるので (II<sub>1</sub>) も non-trivial。

$$(II_2) \begin{cases} ba^{-1}b^{-2}a^{-1}ba^{-1}b^{-2}a^{-1}ba^{-4} = 1 & (1) \\ ba^{-1}b^2a^{-1}ba^{-1}b^{-1}ababab^{-1}a^{-1} = 1 & (2) \end{cases}$$

$$b^3 = 1 \text{ とおくと } (1) \text{ より } a^3 = (ba^{-1})^5$$

$$a^3 = 1 \text{ とおくと } (2) \text{ より } (ba^{-1})^3 b^{-1}ababab^{-1}a^{-1} = 1$$

$$\text{ところが } (ba^{-1})^3 = ab^{-1}ab^{-1} \text{ より } (ba)^4 = 1$$

$$\text{従って } a^3 = b^3 = (ab)^4 = (a^{-1}b)^5 = 1$$

[2] により non-trivial。

$$(II_3) \begin{cases} baba^{-1}b^{-2}a^{-1}ba^2ba^{-1}b^{-2}a^{-1} = 1 & (1) \\ ba^2ba^{-1}b^{-1}a^{-1}ba^2ba^{-1}b^{-2}a^{-1} = 1 & (2) \end{cases}$$

(1) + (2) より  $aba^{-1}bab^{-1} = 1$  ( $ba^{-1} = x$ ) なる関係式をもつので (II<sub>3</sub>) は torus knot からの Dehn construction による homology 3-sphere の問題に帰着できるので (4) により non-trivial。

$$(II_4) \begin{cases} ba^{-1}b^{-2}a^{-1}ba^2ba^{-1}b^{-2}a^{-1} = 1 & (1) \\ ba^2ba^{-1}b^{-1}a^{-1}b^{-1}a^{-1}ba^2ba^{-1}b^{-2}a^{-1} = 1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \text{ より } a^2ba^{-1}b^{-1}a^{-1}ba = 1$$

$$a^3 = b^{-1}abab^{-1} \quad \text{これは変換 } x = ab \text{ である}$$

$x^2 = axa$  となり (II<sub>4</sub>) は (II<sub>3</sub>) と同様になる。

$$(II_5) \begin{cases} a^2 = babab^{-1}a^{-1}b^{-1}a^{-1}babab \\ b^2 = ababa^{-1}b^{-1}a^{-1}b^{-1}a^{-1}baba \end{cases}$$

$b \rightarrow b^{-1}$  で (II<sub>5</sub>) は (II<sub>3</sub>) と同型。

$$(II_6) \begin{cases} a^2 = b^{-1}a^{-1}b^{-1}abababab^{-1}a^{-1}b^{-1} & \text{--- (1)} \\ b^2 = a^{-1}b^{-1}a^{-1}babababab^{-1}b^{-1}a^{-1} & \text{--- (2)} \end{cases}$$

(1)により  $x = ab$  とおくと  $b = a^{-1}x$ ,  $b^{-1} = x^{-1}a$  から

$$a = x^{-2}ax^3ax^{-2}$$

$$x^2ax^2 = ax^3a \quad y = ax \text{ の変換を続ける。}$$

$$x^2yx^2 = y^2 \text{ となる。}$$

従って (II<sub>6</sub>) も又 (II<sub>3</sub>) と同様に non-trivial。

$$(II_7) \begin{cases} a^2 = b^{-1}abab^{-1}a^{-1}ba^{-1}b^{-1}abab^{-1} \\ b^2 = a^{-1}baba^{-1}b^{-1}ab^{-1}a^{-1}baba^{-1} \end{cases}$$

$$b \rightarrow b^{-1} \quad a^2 = bab^{-1}aba^{-1}b^{-1}a^{-1}bab^{-1}ab$$

$$b^2 = aba^{-1}bab^{-1}a^{-1}b^{-1}aba^{-1}ba$$

$$x = a^{-1}b \text{ の変換で } a = xax^{-1}axa^{-1}x^{-1}a^{-1}xax^{-1}ax$$

$$y = a^{-1}x \text{ の変換で } 1 = yay^{-1}aya^{-1}y^{-1}a^{-1}yay^{-1}ay$$

$$y^2 = a^{-1}ya^{-1}y^{-1}aya^{-1}y^{-1}a^{-1}ya^{-1}$$

(II<sub>7</sub>) も又 (II<sub>3</sub>) と同様に non-trivial。

$$(II_8) \begin{cases} a^2 = b^{-1}aba^{-1}b^{-1}abab^{-1}a^{-1}bab^{-1} \\ b^2 = a^{-1}bab^{-1}a^{-1}baba^{-1}b^{-1}aba^{-1} \end{cases}$$

(II<sub>8</sub>) は conjugate presentation でも表示 (II<sub>8</sub>) をもつ。  
unknown.

[II] 又つの関係式がどちらかに代入可能であるが  $\pi_1(M) \neq 0$

$$(II_1) \begin{cases} baba^{-2} = 1 & \text{--- (1)} \\ babab^{-5}ababa^{-3} = 1 & \text{--- (2)} \end{cases}$$

$$a^3 = (ba)^2 = 1 \text{ とあくと } a^3 = b^5 = (ab)^2 = 1 \text{ となり.}$$

non-trivial であるが (1) を (2) に代入した後

$$babab^{-5}ababa^{-2}a^{-1} = 1 \quad \text{では} \quad \begin{cases} baba^{-2} = 1 \\ b^{-4}aba = 1 \text{ となり} \end{cases}$$

代入可能性はなくなる。

$$(II_2) \begin{cases} baba^{-2} = 1 \\ baba^{-1}b^{-1}a^{-1}b^3a^{-1}b^{-1}a^{-1}baba^{-1} = 1 \end{cases}$$

$$(II_3) \begin{cases} baba^{-1}ba^2b^4a^2ba^{-1} = 1 \\ bababa^{-1} = 1 \end{cases}$$

$$a^3 = b^5 = (ab)^3 = 1 \quad \text{non-trivial}$$

$$\text{代入 1 回後では } a^2b^5 = 1$$

$$(bababa^{-1} = 1 \text{ となり代入可能性は.}$$

$$(II_4) \begin{cases} baba^{-2} = 1 \\ babab^{-6}ababa^{-3}bababa^{-3} = 1 \end{cases} \quad \text{なくなる。}$$

$$a^2 = bab, b^4 = aba \text{ であり non-trivial.}$$



$$(I_5) \begin{cases} ba b a b a b a b a b a^{-2} b^{-1} a^2 b^4 a^2 b^{-1} a^{-2} = 1 \\ b^3 a^2 = 1 \end{cases}$$

$$a^2 = b^3 = (ab)^5 = 1$$

[III]  $\pi_1(M) = 1$  である example

$$(I_1) \begin{cases} ba^2 b^2 a^2 b^2 a^2 b^2 a^2 ba^{-1} = 1 & \text{--- (1)} \\ b^{-2} a^{-2} b^{-2} a^{-2} b^{-3} a^{-2} = 1 & \text{--- (2)} \end{cases}$$

(2)の逆をとって  $b^3 a^2 b^2 a^2 b^2 a^2 = 1$  これは (1) に代入

可能で  $ba^2 \underline{b^3 a^2 b^2 a^2 b^2 a^2} ba^{-1} = 1$

$$\begin{cases} b^3 a^2 b^2 a^2 b^2 a^2 = 1 \\ ba^2 a^{-1} = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} b^3 a^2 b^2 a^2 b^2 a^2 = 1 \\ ba = 1 \end{cases}$$

$N \leq 15$ ,  $M \leq 15$  の範囲では  $\pi_1(M) = 0$  のときは全ての example が最後の段階 ( $a=1$ ,  $b=1$ ) まで代入可能である。

[IV] 最後に, example から予想される homology と homotopy の相違点は次に帰着するものと思われる。

『genus 2 の Heegaard 分解をもつ homology 3-sphere が homotopy 3-sphere であるための必要十分条件は,  $f$  あるいは  $f^{-1}$  のどちらかが生成する 2 つの関係式が, どの段階でも, 代入可能であること。』

## 参考文献

- [1] Tatsuo Homma; Heegaard 分解と曲面上の曲線系数理解析研究所講究録 1974
  - [2] H. S. M. Coxeter; The abstract groups  $G^{m,n,p}$   
Trans. Amer. Math. Soc 45 (1939), 73-150
  - [3] R. H. Bing & Martin; Cubes with knotted holes.  
Trans. Amer. Math. Soc 155 (1971), 217-231
  - [4] J. Hempel; A simply connected 3-manifold is  $S^3$  if it is the sum of a solid torus and the complement of a torus knot,  
Proc. Amer. Math. Soc 15 (1964), 154-158
- 最近 2-bridge knot に関して、特に  $6_2, 6_3$  に対する  
cubes with knotted holes の問題に関して、computer で  
解決した論文が表われた。
- [5] R. Riley; knots with parabolic property - P,  
J. Math. Oxford, 25 (1974) 273-283